数理解析研究所講究録
148巻 1972年 1-7

wM−空間に関連する問題

愛媛大　白城高教

はじめにM−空間およびその一般化であるM^*−，$M^\#$−，wM−，$w\Delta$−空間の定義をのべる。位相空間Xの被覆の列$\{\mathfrak{U}_i \mid i=1,2,\cdots\}$に対して次の2つの条件を考える。

(M_1) ある点$x \in X$と任意のi（自然数）に対して$x_i \in St(x,\mathfrak{U}_i)$をみたす点列$\{x_i\}$は cluster point をもつ。

(M_2) ある点$x \in X$と任意のiに対して$x_i \in St^2(x,\mathfrak{U}_i)$をみたす点列$\{x_i\}$は cluster point をもつ。

こゝで$St^2(x,\mathfrak{U}_i) = St(St(x,\mathfrak{U}_i),\mathfrak{U}_i)$である。

本文において，(完全)正則空間や正規空間の場合にはT_1−分離公理がみたされているものとする。Xを位相空間とするとき，XがM−空間であるとは，(M_1)条件をみたすXの開被覆の正規列(normal sequence)が存在するときをいう。XがM^*−空間とは，(M_1)条件をみたすXの局所有限な閉被覆の列が存在するときをいう（[5]）。Xが$M^\#$−空間とは，

(M_1) 条件をみたす X の closure-preserving 閉被覆列が存在するときをいう。([13])。 X が wM-空間とは，(M_2) 条件をみたす X の閉被覆列が存在するときをいう。([6])。 X が $w\Delta$-空間とは，(M_1) 条件をみたす X の閉被覆列が存在するときをいう。([2])。 次の diagram が知られている。

$$M \Longrightarrow M^* \Longrightarrow M^\# \Longrightarrow wM \Longrightarrow w\Delta$$

一方 $M \not\Leftarrow M^*$, $wM \not\Leftarrow w\Delta$ を示す例が知られている。([10], [6])。

問 1. $M^\#$-空間であって M^*-空間でないものが存在するか。 wM-空間であって $M^\#$-空間（もしくは M^*-空間）でないものが存在するか。

正規 M^*-空間は M-空間であることが Ishii [5] において証されているが次は未解決である。

問 2. (Ishii [6])。 正規 wM-空間は M-空間であるか。

X が正規 $w\Delta$-空間であるとき，$w\Delta$-空間を定義する (M_1) 条件をみたす閉被覆列 $\{\mathfrak{U}_i\}$（之を $w\Delta$ の定義列ということにする）において，各 $\mathfrak{U}_i$ が局所有限ならば X は M-空間になる。

問 3. X が正規かつ point-paracompact な $w\Delta$-空間ならば X は M-空間であるか。

完全正則 (completely regular) な M^*－空間が完備な uniformity をゆるすならば paracompact M－空間である（［12］Lemma 3.6 により明らか）が，これに関連し

問 4. 完全正則な $M^\#$－空間（または wM－空間）が完備な uniformity をゆるすならば paracompact（従って M－空間）であるか。

次に距離付けにかんする問題をあげる。

空間 X が G_δ－diagonal をもつための条件は X の開被覆の列 $\{\mathcal{G}_i\}$ が存在して，X の各点 x に対し $\bigcap_i St(x, \mathcal{G}_i) = \{x\}$ をみたすことである。X が $\overline{G_\delta}$－diagonal をもつとは，X の開被覆の列 $\{\mathcal{G}_i\}$ が存在して，X の各点 x に対して，$\bigcap_i \overline{St(x, \mathcal{G}_i)} = \{x\}$ をみたすときをいう。［7］において，

空間 X が距離づけ可能 $\rightleftarrows$ X は wM で $\overline{G_\delta}$-diagonal をもつ。

が知られている。

問 5.（Ishii［6］）。正規 wM－空間が G_δ－diagonal をもつならば距離付け可能であるか。

所でこの問 5 は wM－空間の条件を強めて M－空間としても未解決である。そしてこの場合は次の問 6 と同値であることが分かる。

問 6. 正規，可算コンパクト空間が G_δ－diagonal をもつならば距離付け可能であるか。

i

Heath は [14] において

「M－空間が G_δ-diagonal をもつならば developable か。」

という問題を提出しているが，空間を Hausdorff 又は正則空間に限定するとき，次と同値になる。

問 6'. Hausdorff (又は正則)，可算コンパクト空間が G_δ-diagonal をもつならば距離付け可能であるか。

X の開集合のある族 $\mathcal{U}$ が X の pseudobase であるとは X の各点 x に対し $\bigcap\{U \in \mathcal{U} \mid x \in U\} = \{x\}$ がみたされるときをいう。次に X の各点 x に対し x をふくむ X の部分集合の族 $\mathcal{N}_x$ があたえられ，有限乗法的であるとする。$\mathcal{N} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{N}_x$ が X の weak base であるとは，

$P(\subset X)$ が開集合 $\rightleftarrows$ $\forall x \in X - P$, $\exists Q \in \mathcal{N}_x$, $P \cap Q = \phi$

が成立つときをいう。([1])。

Hausdorff M^*－空間が点可算 (point-countable) pseudobase をもつならば距離付け可能であるが ([12])，

問 7. Hausdorff $M^\#$－(又は wM-) 空間が点可算 (pseudo-) base をもつならば距離付け可能であるか。

この問は次と同値である。

「正則 $M^\#$－(又は wM-) 空間が点可算 weak base をもつならば距離付け可能であるか。」

Burke の問題 ([3]) は問 7 に関連している。

問8.(Burke)。正則 $w\Delta$-空間が点可算な基をもつならば developable であるか。

かりに問8が肯定的にとかれるならば，問7における「Hausdorff $M^{\#}$(wM)-空間が点可算な基をもつならば距離付け可能か」の部分も肯定的にとかれることになる。

距離空間の quotient s-image である空間を q-s 空間であるという([4])。[12]において次のことが証される。「正則 M^{*}-空間が q-s 空間ならば距離付け可能である。」

問9。正則 $M^{\#}$-(又は wM-)空間が q-s 空間ならば距離付け可能であるか。

次の条件を(k)とする：X の開被覆列 $\{\mathcal{U}_i\}$ が存在して，X の任意のコンパクト集合 K に対し，$x_i \in St(K, \mathcal{U}_i)$ $(i=1,2,\cdots)$ をみたす点列 $\{x_i\}$ は cluster point をもつ。

上でコンパクトの代りに可算コンパクトを用いて条件(c)を定義できる。これらの条件をみたす空間にかんして，wM-空間と類似した種々の距離付け定理がえられる。明らかに wM-空間はこれらの条件をみたし，またこの条件をみたす空間は $w\Delta$ である。$w\Delta$-空間は必ずしもこの条件をみたさないが，

問10. 条件(k)(又は(c))をみたす空間は wM であるか。

は未解決である。

参考文献

[1] A. Arhangel'skii: Mappings and spaces. Russian Math. Surveys. 21 (1966), 115-162.

[2] C. Borges: On metrizability of topological spaces. Canad. J. Math. 20 (1968), 795-804.

[3] D. Burke: On p-spaces and $w\Delta$-spaces. Pacific J. Math. 35 (1970), 285-296.

[4] T. Hoshina: On the quotient s-images of metric spaces. Sci. Rep. T.K.D. Sect A 10 (1970), 43-46.

[5] T. Ishii: On M- and M^*- spaces. Proc. Japan Acad. 44 (1968), 1028-1030.

[6] T. Ishii: On wM-spaces. I, II. Proc. Japan Acad. 46 (1970), 5-15.

[7] T. Ishii and T. Shiraki: Some properties of wM-spaces. Proc. Japan Acad. 47 (1971), 167-172.

[8] E. Michael and F. G. Slaughter: Σ-spaces with a point-countable separating open covers are σ-spaces. (to appear)

[9] K. Morita: Products of normal spaces with metric spaces. Math. Ann. 154 (1964), 365-382.

[10] K. Morita: Some properties of M-spaces. Proc. Japan Acad. 43 (1967), 869-872.

[11] A. Okuyama: On metrizability of M-spaces. Proc. Japan Acad. 40 (1964), 176-179.

[12] T. Shiraki: M-spaces, their generalizations and metrization theorems. Sci. Rep. T.K.D. Sect A 11 (1971), 57-67.

[13] F. Siwiec and J. Nagata: A note on nets and metrization. Proc. Japan Acad. 44 (1968), 623-627.

[14] Proposed problems in General topology and its applications. 1 (1971)